Exercice 1

Cet exercice sera fait à l'aide d'un tableur (Excel, OpenOffice, Works ou StarOffice) et il sera rendu sous la forme du fichier tableur. Vous me le transmettrez donner les 50 premiers termes des suites suivantes. Lorsque vous pensez que la suite converge, donner une estimation de la limite éventuelle :

1. $\forall k \in \mathbb{N}, \quad a_{k+1} = \dfrac{2 + a_k}{1 + (a_k)^4}$ avec $a_1 = 7$.
2. $\forall n \geqslant 1, \quad b_n = b_{n-1} e^{-b_{n-1}}$ avec $b_0 = 3$.
3. $\forall n \in \mathbb{N}^{\times}, \quad c_n = \sqrt{c_{n-1} + n}$ avec $c_0 = 0$.
4. $\forall j \in \mathbb{N}, \quad d_{j+1} = d_j + \dfrac{1}{2}(5 - (d_j)^2)$ avec $d_0 = 0$.
5. $\forall n \geqslant 0, \quad e_{n+1} = 1 + \dfrac{n}{e_n}$ et $e_0 = 1$.
6. $\forall p \geqslant 1, \quad f_{p+1} = f_p + \dfrac{1}{p \times 2^p}$ et $f_1 = 1$
7. $\forall r \in \mathbb{N}^{\times}, \quad 35 g_{r+1} = 3\sqrt{g_r} + 2\sqrt{g_{r-1}}$ avec $g_1 = 3$ et $g_2 = 7$.
8. $\forall m \in \mathbb{N}^{\times}, \quad h_{m+1} = \dfrac{h_m h_{m-1}}{h_m + h_{m-1}}$ avec $h_0 = 1$ et $h_1 = 2$.
9. $\forall n \geqslant 0, \quad i_{n+2} - \dfrac{i_{n+1}}{2} + \dfrac{i_n}{6} = 3n - 1$ avec $i_0 = i_1 = 0$
10. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} j_{n+1} = \dfrac{1}{2}(j_n + k_n) \\ k_{n+1} = \sqrt{j_n k_n} \end{cases}$ et $\begin{cases} j_0 = 3 \\ k_0 = 2 \end{cases}$
11. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} l_{n+1} = \dfrac{l_n + m_n}{2} \\ l_{n+1} = \dfrac{2 l_n m_n}{l_n + m_n} \end{cases}$ et $\begin{cases} l_0 = 2 \\ m_0 = 3 \end{cases}$

Exercice 2

L'objectif est de montrer, et non de démontrer, une méthode itérative de résolution de certains systèmes linéaires.

1. **Première partie** :

   On considère le système suivant : $(S_1) : \begin{cases} 3x + z - t = 2 \\ -x + 4y + z = 5 \\ x - y - 3z = -10 \\ y - 2t = 14 \end{cases}$

   (a) Première méthode : Montrer que le système (S) admet une et une solution $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$

   (b) Deuxième méthode :

   Montrer que (S_1) est équivalent à (S') : $\begin{cases} x = \dfrac{2 - z + t}{3} \\ y = \dfrac{5 + x - z}{4} \\ z = \dfrac{10 + x - y}{3} \\ t = \dfrac{-14 + y}{2} \end{cases}$

   On introduit les quatres suites $(x_n)_n$, $(y_n)_n$, $(z_n)_n$ et $(t_n)_n$ définies par récurrence par :

$$\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{2 - z_n + t_n}{3} \\ y_{n+1} = \dfrac{5 + x_n - z_n}{4} \\ z_{n+1} = \dfrac{10 + x_n - y_n}{3} \\ t_{n+1} = \dfrac{-14 + y_n}{2} \end{cases} \quad \text{avec} \quad x_0 = y_0 = z_0 = t_0 = 0$$

   Calculer, à l'aide d'un tableur, les 40 premiers termes des suites $(x_n)_n$, $(y_n)_n$, $(z_n)_n$ et (t_n) (on rendra le fichier tableur correspondant avec le dm)
   Que constate-t-on ? Comparer numériquement (x_n, y_n, z_n, t_n) avec $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ lorsque n est suffisamment grand.

2. **Deuxième partie** :

   On considère le système (S_2) définie par (S_2) : $\begin{cases} x + z - t = 2 \\ -x + 2y + z = 5 \\ x - y - z = -10 \\ y - 2t = 14 \end{cases}$

   (a) Résoudre le système (S_2). On note (A, B, C, D) la solution.

   (b) Montrer que (S_2) est équivalent à (S_2') : $\begin{cases} x = 2 - z + t \\ y = \dfrac{5 + x - z}{2} \\ z = 10 + x - y \\ t = \dfrac{-14 + y}{2} \end{cases}$

(c) On introduit les quatres suites $(a_n)_n$, $(b_n)_n$, $(c_n)_n$ et $(d_n)_n$ définies par récurrence par :

$$\begin{cases} a_{n+1} = 2 - c_n + d_n \\ b_{n+1} = \dfrac{5 + a_n - c_n}{2} \\ c_{n+1} = 10 + a_n - b_n \\ d_{n+1} = \dfrac{-14 + b_n}{2} \end{cases} \quad \text{avec} \quad a_0 = b_0 = c_0 = d_0 = 0$$

Calculer, à l'aide d'un tableur, les 100 premiers termes des suites $(x_n)_n$, $(y_n)_n$, $(z_n)_n$ et (t_n) (on rendra le fichier tableur correspondant avec le dm)
Que constate-t-on ? Peut-on obtenir une valeur approchée de (A, B, C, D) ?

3. **Troisième partie** :
Considérons un système (S) de p équations à p inconnues $x_1, ..., x_p$ de la forme

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + \cdots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 + \cdots + a_{2,p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{p,1}x_1 + a_{p,2}x_2 + a_{p,3}x_3 + \cdots + a_{p,p}x_p = b_p \end{cases}$$

On dit que le système (S) est à diagonale strictement dominante si et seulement

$$\forall i \in [\![1, p]\!], \quad |a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{p} |a_{i,j}| .$$

Par exemple, pour le système (S_1), on a :

$$\begin{array}{llll} a_{1,1} = 3, & a_{1,2} = 0, & a_{1,3} = 1, & a_{1,4} = -1 \\ a_{2,1} = -1, & a_{2,2} = 4, & a_{2,3} = 1, & a_{2,4} = 1 \\ a_{3,1} = 1, & a_{3,2} = -1, & a_{3,3} = -3, & a_{3,4} = 0 \\ a_{4,1} = 0, & a_{4,2} = 1, & a_{4,3} = 0, & a_{4,4} = -2 \end{array} \quad \text{et l'on a bien}$$

$$\begin{array}{l} 3 = |a_{1,1}| > |a_{1,2}| + |a_{1,3}| + |a_{1,4}| = 0 + 1 + 1 = 2 \\ 4 = |a_{2,2}| > |a_{2,1}| + |a_{2,3}| + |a_{2,4}| = 1 + 1 + 1 = 3 \\ 3 = |a_{3,3}| > |a_{3,1}| + |a_{3,2}| + |a_{3,4}| = 1 + 1 = 2 \\ 2 = |a_{4,4}| > |a_{4,1}| + |a_{4,2}| + |a_{4,3}| = 0 + 1 + 0 = 1 \end{array}$$

donc le système (S_1) est à diagonale strictement dominante.
Par contre, le système (S_2) n'est pas à diagonale strictement dominante car

$$1 = |a_{1,1}| \not> |a_{1,2}| + |a_{1,3}| + |a_{1,4}| = 1 + 0 + 1 = 2$$

On démontre, mais nous le ferons pas, que tout système linéaire (S) à diagonale strictement dominante admet une et une seule solution. En outre, la deuxième méthode utilisée dans la première partie fournit p suites $(x_1^{(n)})$, $(x_2^{(n)})$, ..., $(x_p^{(n)})_n$ qui sont convergentes et, si l'on note $l_1, .., l_p$ leurs limites respectives, alors $(l_1, .., l_p)$ est l'unique solution de (S)

Application :

On considère le système (S) de 6 équations à 6 inconnues x, y, z, t, u, v définie par :

$$(S) : \begin{cases} 1309x + 167y - 3z + 325t + 2u - 500v = -2001 \\ 101x - 7000y + 1001z - 50t + 876u + 900v = 1 \\ 23y + 367z + t - 2u + 3v = 267 \\ x + y - 300z + 4000t = 12\,241 \\ 12x - 221y + 301z + 43t - 67u + 900v = 876 \\ -60x + 70y + 34z + 100t + 2u + 1000v = 1579 \end{cases}$$

Construire le système (S') équivalent à (S) en suivant la stratégie de la partie 1 puis introduire les 6 suites récurrentes $(x_n, y_n, z_n, t_n, u_n, w_n)$. Utiliser un tableur pour calculer suffisamment de termes de chacune de ces suites. Donner alors une valeur approchée à 10^{-9} près de la solution (x, y, z, t, u, v) du système (S)

On ne recherchera surtout pas la solution par le pivot. Pour les téméraires éventuels, voici les valeurs exactes de x, y, z, t, u, v

$$\begin{array}{lll} x & = & -\dfrac{187\,409\,082\,561\,753\,311}{94\,569\,607\,388\,315\,838}, \quad y = \dfrac{63\,102\,937\,175\,846\,369}{94\,569\,607\,388\,315\,838}, \\ z & = & \dfrac{21\,733\,810\,974\,457\,409}{31\,523\,202\,462\,771\,946}, \quad t = \dfrac{98\,109\,275\,005\,230\,979}{31\,523\,202\,462\,771\,946}, \\ u & = & \dfrac{364\,196\,498\,068\,272\,647}{94\,569\,607\,388\,315\,838}, \quad v = \dfrac{33\,761\,878\,431\,011\,923}{31\,523\,202\,462\,771\,946}, \end{array}$$

Exercice 3

1. Montrer que l'équation $\ln x = 4 - x$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}_+^\times$.
Justifier que $2 \leqslant \alpha \leqslant 4$
(**données numériques** : $\ln 2 \simeq 0.69 \pm 10^{-2}$, $\ln 3 \simeq 1.098 \pm 10^{-2}$ et $\ln 4 \simeq 1.37 \pm 10^{-2}$)
Montrer que α est aussi solution de l'équation $x = 4 - \ln x$

2. On considère la suite u définie par $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 4 - \ln u_n$ avec $u_0 = 2$
Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in [2, 4]$ puis que $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2} |u_n - \alpha|$ et enfin que $|u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2^n}$. En déduire une valeur approchée de α à 10^{-6} près.