CONCOURS 1998

DES ÉCOLES DES MINES D'ALBI, ALÈS, DOUAI, NANTES

Epreuve spécifique de Mathématiques (filière MPSI))

Instructions générales :

Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.

PREMIER PROBLEME

$\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels.

On considère n et p deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 2.

On notera $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels, $GL_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices inversibles de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, et $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices diagonales de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

I_n désigne la matrice identité de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire la matrice diagonale d'ordre n dont les termes diagonaux sont tous égaux à 1.

Le but de ce problème est l'étude des ensembles

$$\mathcal{R}_n(p) = \{A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \quad / \quad A^p = I_n\}.$$

Dans la deuxième et la troisième partie, E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2 muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$, et Id_E désigne l'identité de E.

I. Généralités

1. $\mathcal{R}_n(p)$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$?
2. Soit $A \in \mathcal{R}_n(p)$. Montrer que $A \in GL_n(\mathbb{R})$ et que $A^{-1} \in \mathcal{R}_n(p)$.
3. Soit $A \in \mathcal{R}_n(p)$ et $P \in GL_n(\mathbb{R})$. Montrer que $P^{-1}AP \in \mathcal{R}_n(p)$.
4. Montrer que $\mathcal{R}_n(p) \cap \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ est un ensemble fini dont on déterminera le cardinal.
5. On considère q un entier naturel supérieur ou égal à 2, et on appelle d le plus grand diviseur commun de p et q. Montrer que $\mathcal{R}_n(p) \cap \mathcal{R}_n(q) = \mathcal{R}_n(d)$.

II. Etude de $\mathcal{R}_2(2)$

1. Soit A un élément de $\mathcal{R}_2(2)$ tel que $A \neq I_2$ et $A \neq -I_2$, et soit u l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est A.
   (a) Montrer que $\ker(u - Id_E) \oplus \ker(u + Id_E) = E$.
   (b) En déduire qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
   (c) Montrer qu'il existe quatre réels a, b, c et d tels que $ad - bc \neq 0$ et
   $$A = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} ad+bc & -2ab \\ 2cd & -ad-bc \end{pmatrix}.$$
2. Montrer que $\mathcal{R}_2(2)$ muni de la multiplication des matrices n'est pas un groupe. Interpréter géométriquement ce résultat.

III. Etude de $\mathcal{R}_2(3)$

Dans toute la suite du problème, M désigne un élément de $\mathcal{R}_2(3)$, et v l'endomorphisme de E dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est M. On considère les sous-espaces vectoriels de E :

$$F = \ker(v - Id_E) \quad \text{et} \quad G = \ker(v^2 + v + Id_E)$$

où $v^2 = v \circ v$.

1. (a) Montrer que $F \cap G = \{0\}$.
   (b) Soit $x \in E$. Montrer que $\frac{1}{3}\left(x + v(x) + v^2(x)\right) \in F$ et que $\frac{1}{3}\left(2x - v(x) - v^2(x)\right) \in G$.
   (c) En déduire que $E = F \oplus G$.
2. Que peut-on dire de M si F est de dimension 2 ?
3. Le but de cette question est de montrer à l'aide d'un raisonnement par l'absurde que F n'est pas de dimension 1. On suppose donc que F est de dimension 1.
   (a) Montrer qu'il existe une base $\mathcal{G} = (g_1, g_2)$ de E telle que F soit la droite vectorielle engendrée par g_1 et G soit la droite vectorielle engendrée par g_2.
   (b) En considérant le vecteur $v^2(g_2) + v(g_2) + g_2$, obtenir une contradiction.
4. On suppose dans cette question que F est de dimension 0.
   (a) Montrer que $(e_1, v(e_1))$ est une base de E.
   (b) En déduire qu'il existe un réel a et un réel non nul b tels que

$$M = \frac{1}{b}\begin{pmatrix} ab & -1 - a - a^2 \\ b^2 & -ab - b \end{pmatrix}.$$

DEUXIEME PROBLEME

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $t + \sin t = 0$.
2. Pour tout réel t tel que $t + \sin t \neq 0$, on pose :

$$\psi(t) = \frac{1}{t + \sin t}.$$

   Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_x^{2x} \psi(t)\, dt$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.

   On notera $f(x)$ sa valeur.

   L'objet de ce problème est l'étude de la fonction f associée, définie sur $\mathbb{R}^*$.
3. Soit $x_0 > 0$. La fonction ψ est-elle intégrable sur $]0, x_0]$?
4. Etudier la parité de f.
5. Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$, et calculer $f'(x)$ sous forme factorisée pour $x > 0$.
6. En déduire le sens de variation de f sur $]0, +\infty[$.
7. On cherche à étudier le comportement de f au voisinage de $+\infty$.

(a) Montrer que, pour tout $x > 0$,

$$\left| f(x) - \int_x^{2x} \frac{dt}{t} \right| \leqslant \int_x^{2x} \frac{dt}{t(t+\sin t)}.$$

(b) Montrer qu'il existe $m > 0$ tel que, pour tout $t \geqslant m$, on ait : $t + \sin t \geqslant \dfrac{t}{2}$.

(c) En déduire que $f(x)$ admet une limite finie quand x tend vers $+\infty$.

8. On cherche à étudier le comportement de f au voisinage de 0.

   (a) Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que

   $$\frac{1}{t+\sin t} = \frac{a}{t} + bt + o(t)$$

   au voisinage de 0.

   (b) Soit g une fonction de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{t\to 0^+} g(t) = 0$. Montrer que

   $$\lim_{x\to 0^+} \sup_{t\in[x,2x]} |g(t)| = 0.$$

   (c) En déduire que si h est une fonction continue de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ telle que $h(x) = o(x)$ au voisinage de 0, alors $\displaystyle\int_x^{2x} h(t)\,dt = o(x^2)$ au voisinage de 0.

   (d) Montrer que f admet au voisinage de 0 un développement limité à l'ordre 2 que l'on déterminera.

   (e) Montrer que f peut se prolonger en 0 en une fonction dérivable (on notera encore f ce prolongement), et déterminer $f(0)$ et $f'(0)$.

   (f) Quelle est, au voisinage de 0, la position de la courbe représentative de f par rapport à sa tangente au point d'abscisse 0 ?

   (g) Déterminer un équivalent simple de $f'(x)$ au voisinage de 0.

   (h) En déduire que f est deux fois dérivable en 0, et calculer $f''(0)$.

9. Déterminer le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.